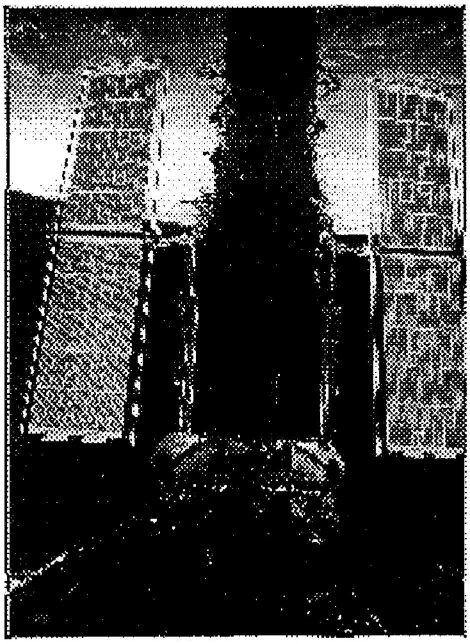
Interaktive Lerneinheiten mit dem Programmpaket Mathematica

Reinhard V. Simonovits und Hans Wilding, HAK Graz

Das Mathematica Notebook Kegelschnitte ist eine Einführung in den Bereich Kegelschnitte. Drei weitere Notebooks Ellipse; Hyperbel und Parabel schließen an dieses Notebook an.
Alles in allem stehen derzeit 36 Notebooks zur Verfügung, die praktisch den ganzen Lehrstoff einer AHS, HAK und HTL abdecken. Die Serie heißt Maths Fun und ist bei der Fa Unisoftware Plus http://www.unisoft.co.at erhältlich.
Maths Fun wird bereits in den Schulen mit viel Erfolg eingesetzt. Damit lassen sich auch tolle Schülerprojekte machen, siehe www.mathsnfun.ac.at.
Alle Mathematica Notebooks, wie auch das vorliegende, sind interaktive Lerndokumente, die die Schüler während des Unterrichts im Team durcharbeiten. Sie erkennen das an den eingerückten Zeilen im Notebook. Mit diesen Befehlen, sogenannten Input Zellen, arbeiten die Schüler.
Sie erzeugen damit Output Zellen, das sind algebraische Ausdrücke, Graphiken, Text, Sound und Movies.
Im vorliegenden Notebook sehen sie aus Platzgründen nur die Input Zellen.
Alle Notebooks sind färbig. Ein Klick auf die blauen Internetlinks im Notebook bringt sie zu aktuellen Wissensgebieten. Diese Ressourcen erhöhen den Bezug zum real life Beispiel und damit die Attraktivität der Mathematik.

Kegelschnitte
Einführung - Ausblick



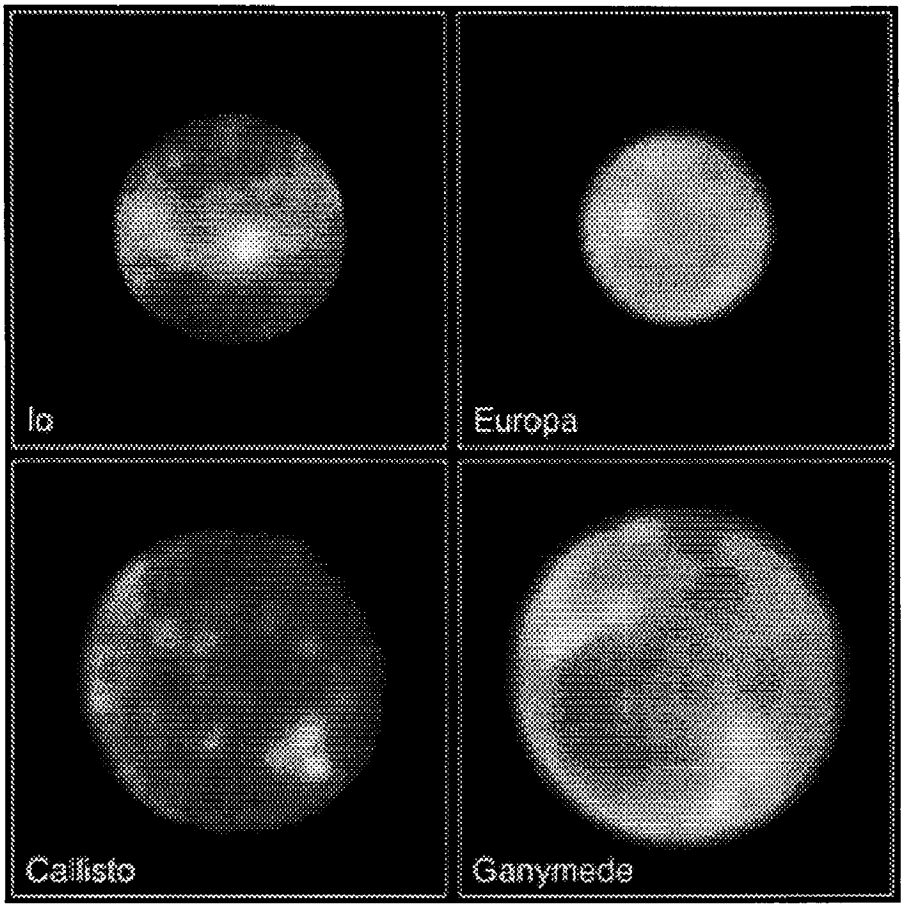
Hubble Space Telescope: NSSDC ID: 90-037B

Zur Nasa Photo Gallery

Notebookübersicht

Bilder vom Saturn und Jupiter und ihren Trabanten, aufgenommen vom Hubble-Teleskop, (HST) haben ein eigenes Flair. Dieses Teleskop wurde 1990 am Himmel ausgesetzt. Ein Fehler im Hauptspiegel konnte erst 1993 von Astronauten behoben werden. Durch solche Projekte versuchen Forscher die Entstehung des Universums besser zu verstehen.

Teleskope sind optische Instrumente, deren Spiegel und Linsen, die nach präzise berechneten Kurven gefertigt werden .Teleskope sammeln und fokussieren das Licht und liefern so phantastische Bilder. Der konkave Spiegel im Hubble-Teleskop hat parabolische Gestalt. Eine **Parabel** ist neben der **Ellipse**, dem **Kreis** und der **Hyperbel** ein **Kegelschnitt** Diese spielen in der Raumforschung und der Beschreibung von Planetenbewegungen eine große Rolle.

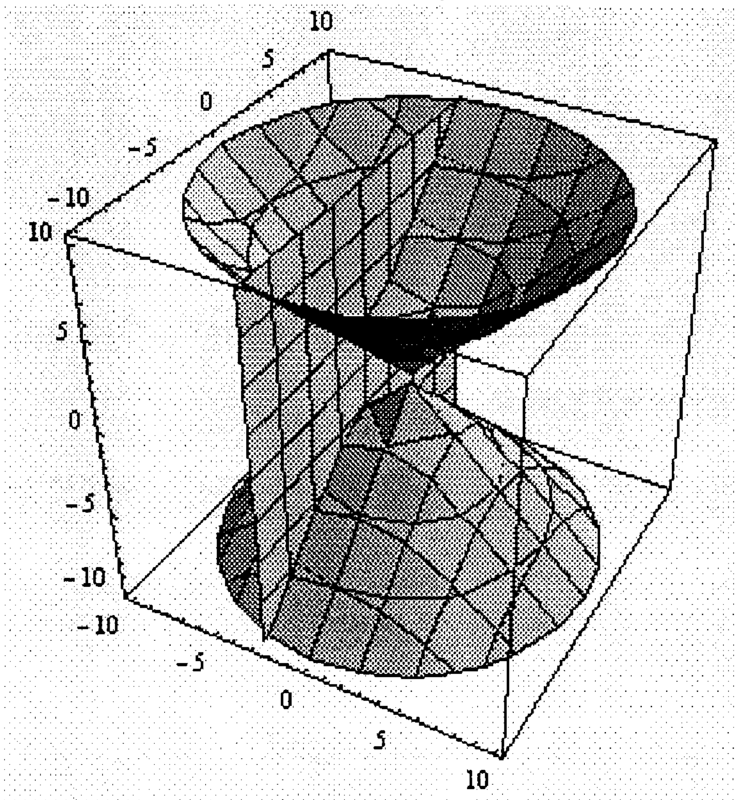


Montage of images of the Galilean satellites (Io, Europa,Ganymede, Callisto) taken by HST

Zur Nasa Photo Gallery

Das Notebook Kegelschnitte zeigt, wie Kegelschnitte entstehen, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sie aufweisen, wozu sie unter anderem angewendet werden.

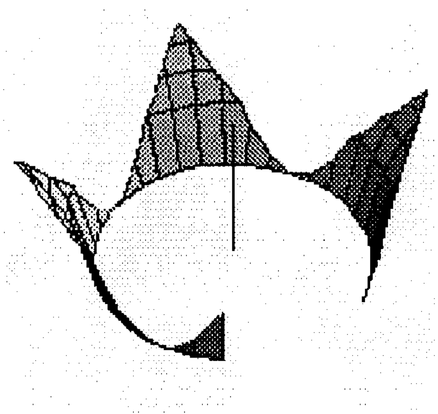
Das erste Kapitel "**Wie entstehen Kegelschnitte**" erläutert graphisch das Zustandekommen von Kegelschnitten. Zu sehen ist dies in der folgenden Abbildung:



Im zweiten Kapitel "**Gemeinsamkeiten- Unterschiede**" werden folgende Aufgabenstellungen erörtert:

- Gemeinsame Kegelschnittsgleichung mit einem Scheitel im Ursprung
- Drehung und Parallelverschiebung von Kegelschnitten
- Herausschälen eines Kegelschnittes aus der allgemeinen Gleichung

Sie dazu folgende Graphik eines rotierten Kegelschnittes:



Hinweis: Das zweite Kapitel setzt Kenntnisse aus den Notebooks Parabel, Ellipse, Kreis, Hyperbel voraus.

Internet

Unsere Homepage:

www.mathsnfun.ac.at

Nasa Photo Gallery

http://nssdc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/database/www-nmc?90-037B

http://nssdc.gsfc.nasa.gov/photo_gallery/photogallery-jupiter.html#hst-satellites

http://www.jpl.nasa.gov/cassini/Movies/index.html

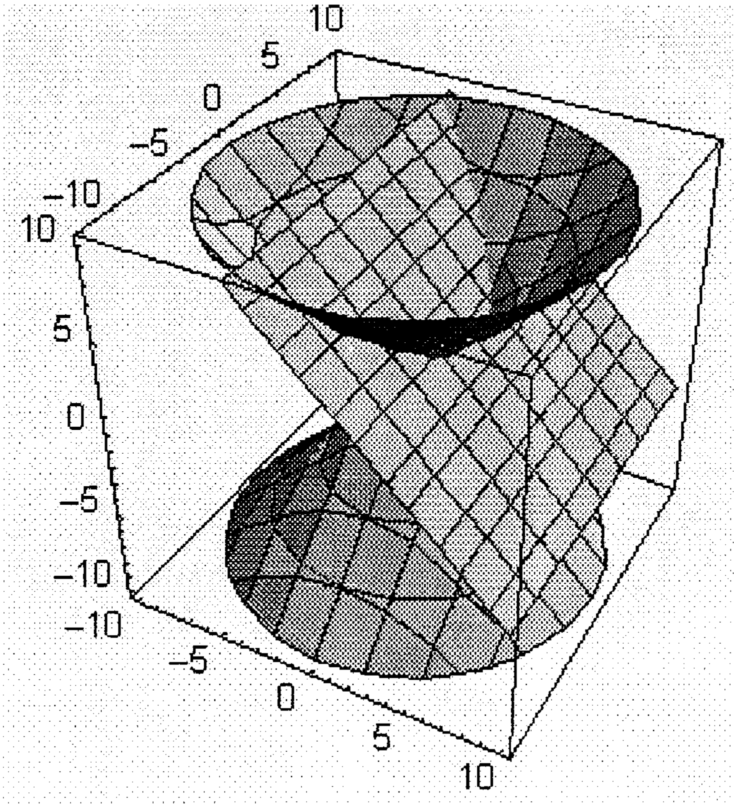
1 Wie entstehen Kegelschnitte

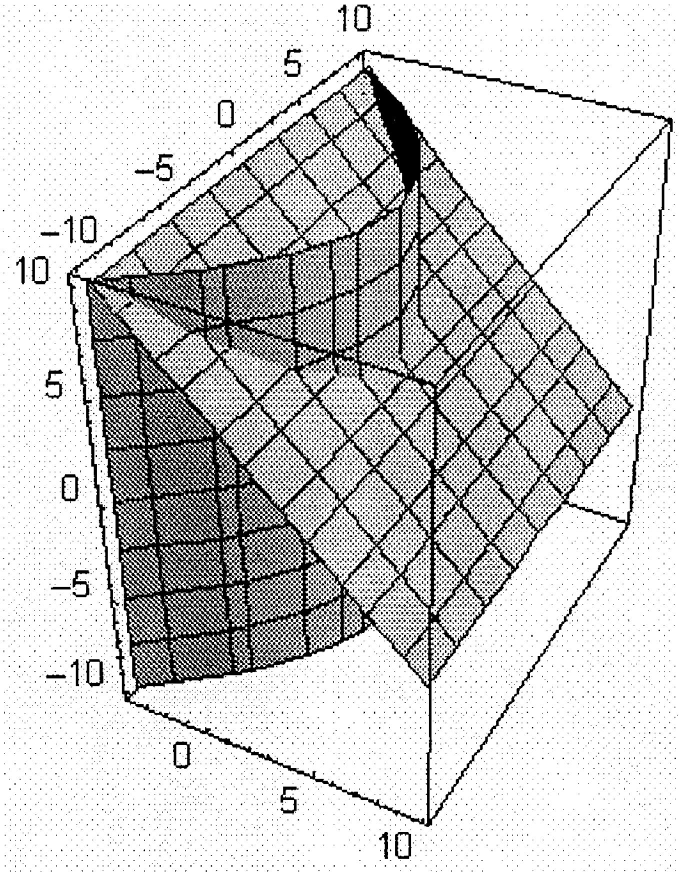
Hinweis: Die folgenden Graphiken und das Movie sind schon fertig vorgegeben, da die Auswahl geeigneter Parameter, um die entstehenden Kegelschnitte gut sehen zu können, zeitaufwendig ist. Dieser Teil ist daher passiv.

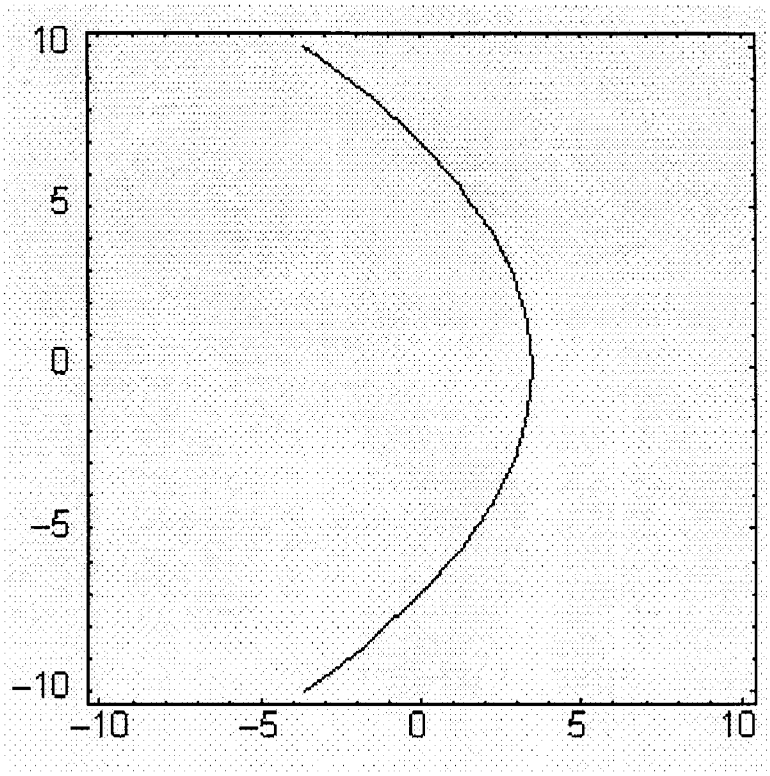
Parabel

Die folgenden Abbildungen zeigen:

1) Schnitt Doppelkegel und Ebene mit resultierender Parabel
2) Schnitt Parabelschar (inclusive der Parabel aus 1) und Ebene
3) Projektion der Parabel aus 1) auf die xy-Ebene


10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10

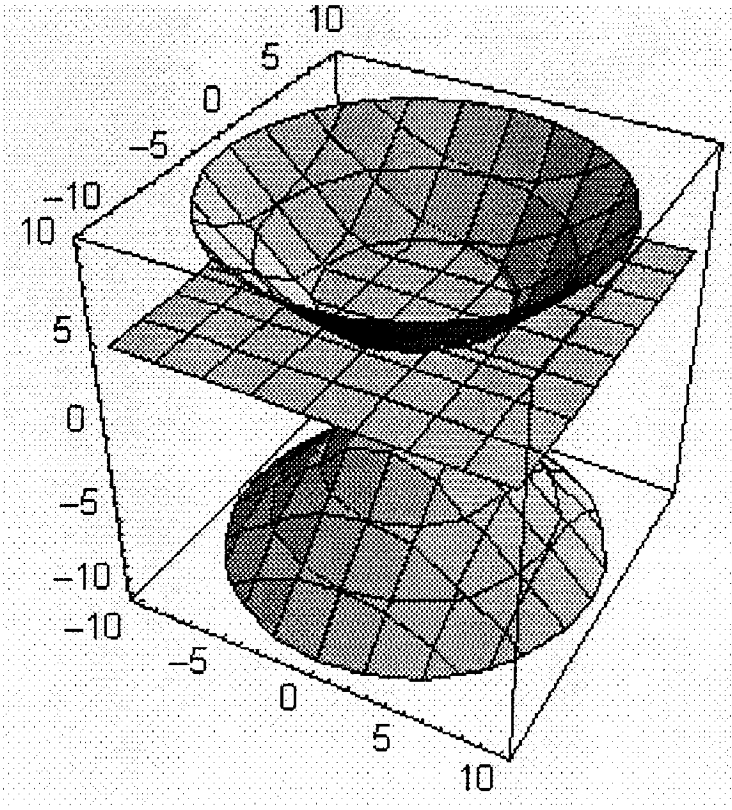

10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
0
5
10

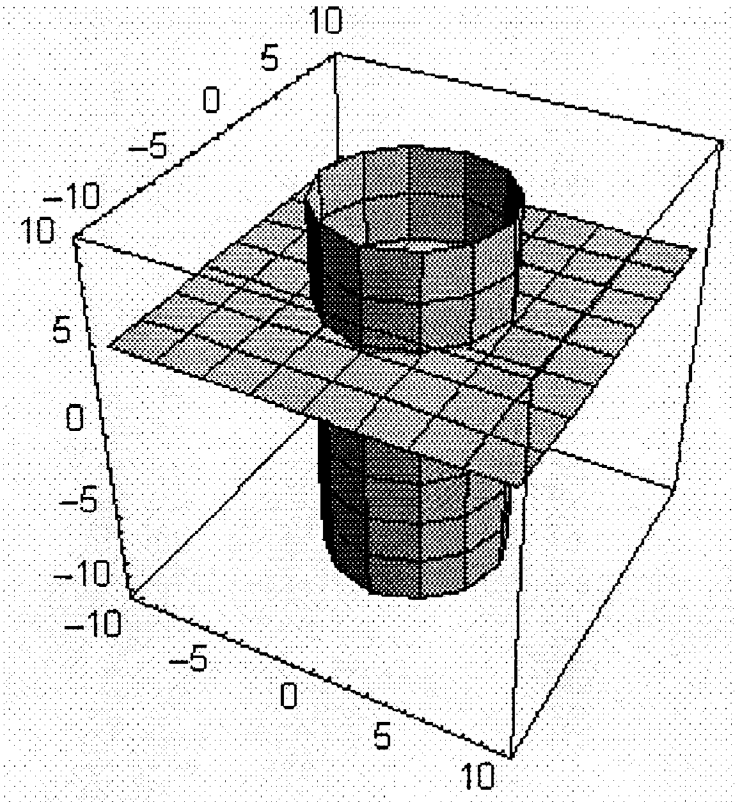


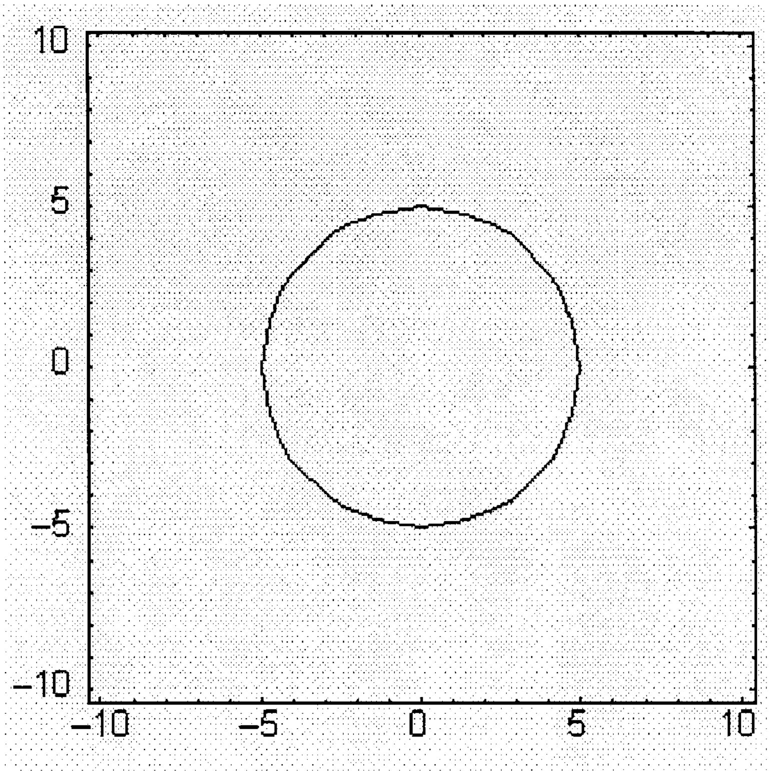
Kreis

Die folgenden Abbildungen zeigen:

1) Schnitt Doppelkegel und Ebene mit resultierendem Kreis
2) Schnitt Kreisschar (inclusive der Kreis aus 1) und Ebene
3) Projektion des Kreises aus 1) auf die xy-Ebene


10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10


10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10



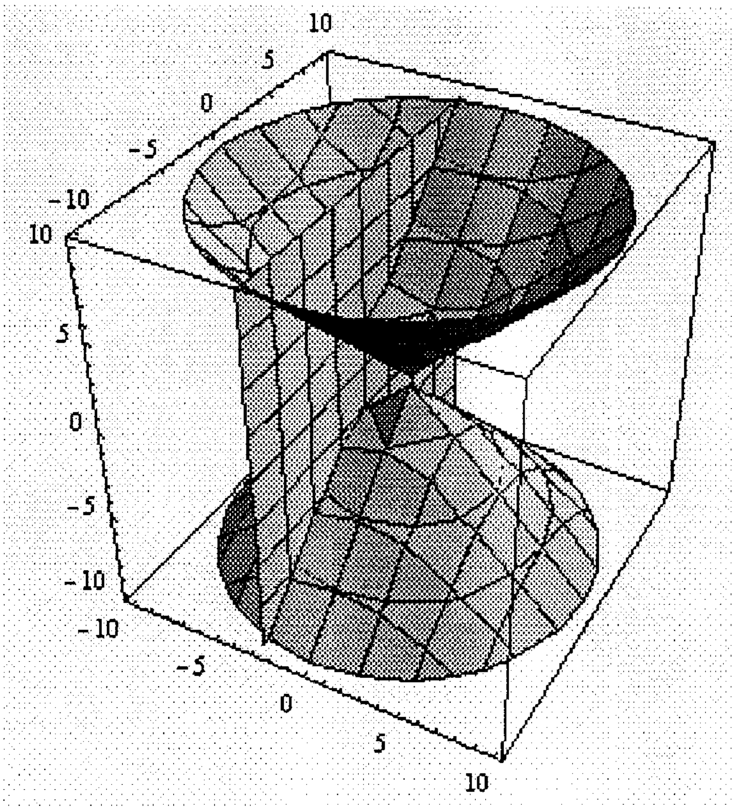
Hyperbel

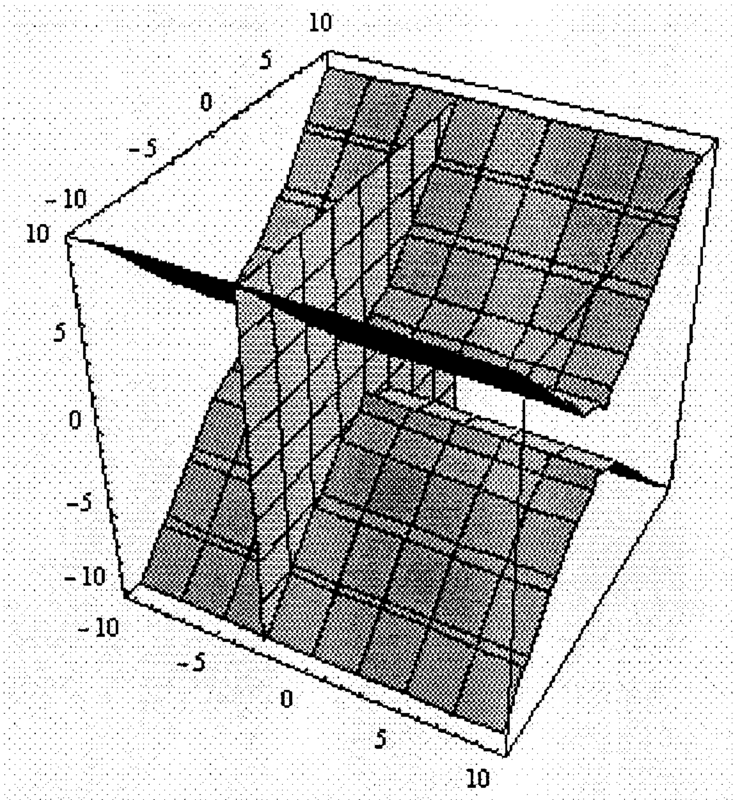
Die folgenden Abbildungen zeigen:

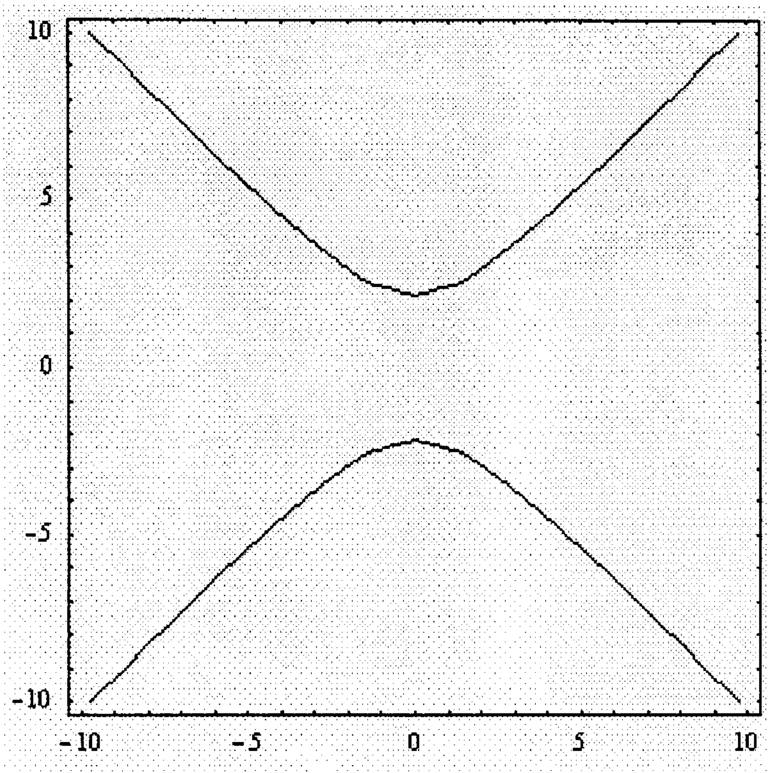
1) Schnitt Doppelkegel und Ebene mit resultierender Hyperbel

2) Schnitt Hyperbelschar (inclusive der Hyperbel aus 1) und Ebene

3) Projektion der Hyperbel aus 1) auf die yz-Ebene


10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10

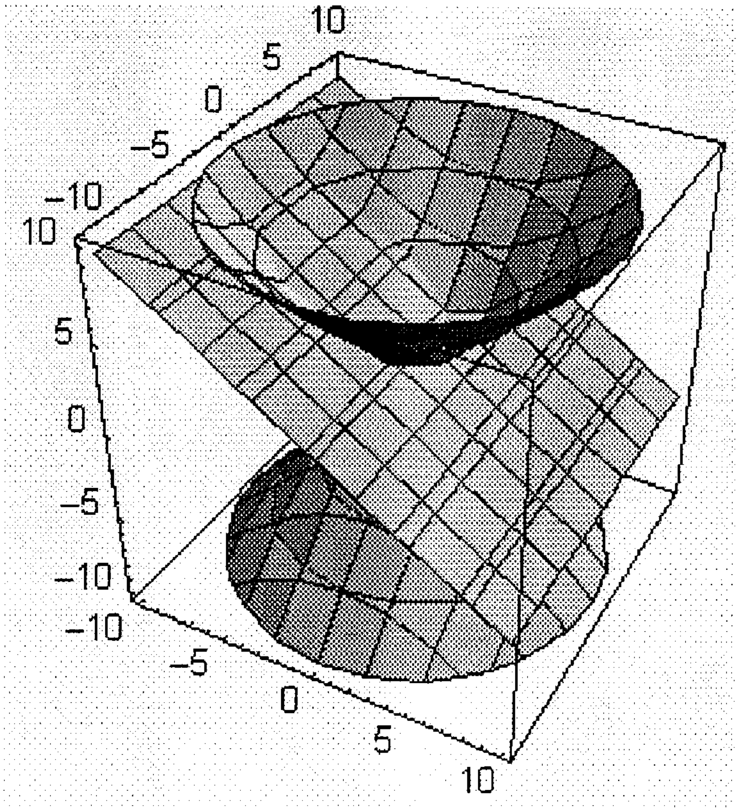

10
5
0
-5
-10
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10

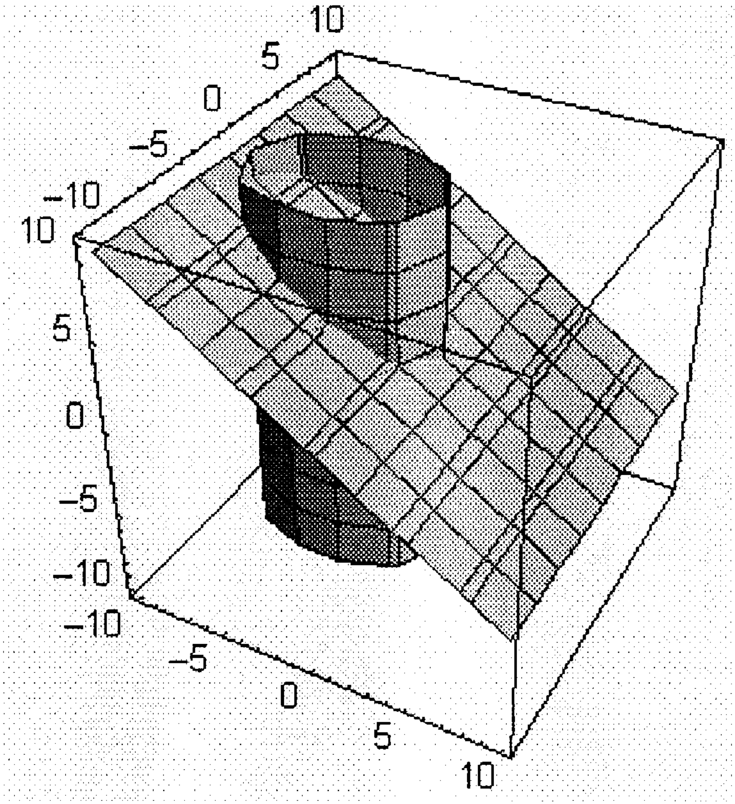


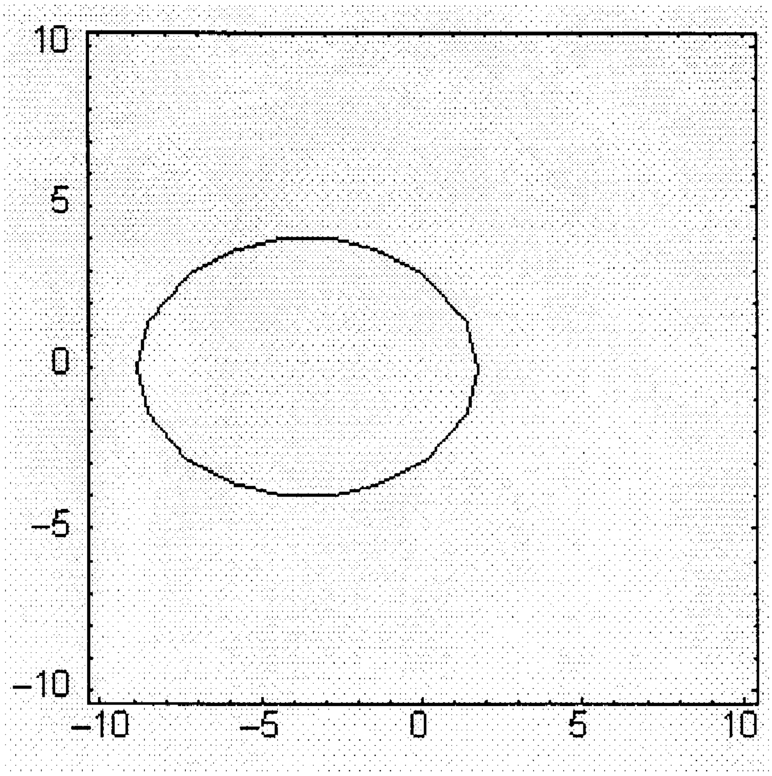
Ellipse

Die folgenden Abbildungen zeigen:

1) Schnitt Doppelkegel und Ebene mit resultierender Ellipse
2) Schnitt Ellipsenschar (inclusive der Ellipse aus 1) und Ebene
3) Projektion der Ellipse aus 1) auf die xy-Ebene


10
5
0
−5
−10
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10


10
5
0
−5
−10
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10



Movie

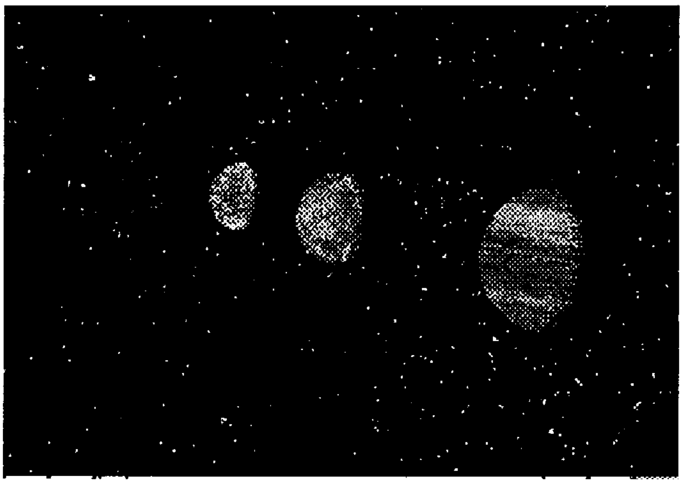
Du kannst als Schnittfläche zwischen Kegel und einer rotierenden Ebene alle 4 Kegelschnitte erzeugen. Lasse folgendes Movie ablaufen und versuche festzustellen, in welcher Reihenfolge die 4 Kegelschnitte in einem Durchlauf vorkommen.

Versuche, die obige Graphik qualitativ mit *Mathematica* nachzuzeichnen. Siehe für die benötigten Anweisungen notfalls in den Notebooks über Parabel, Ellipse und Hyperbel nach.

Zusätzliche Farben erhälst du mit:

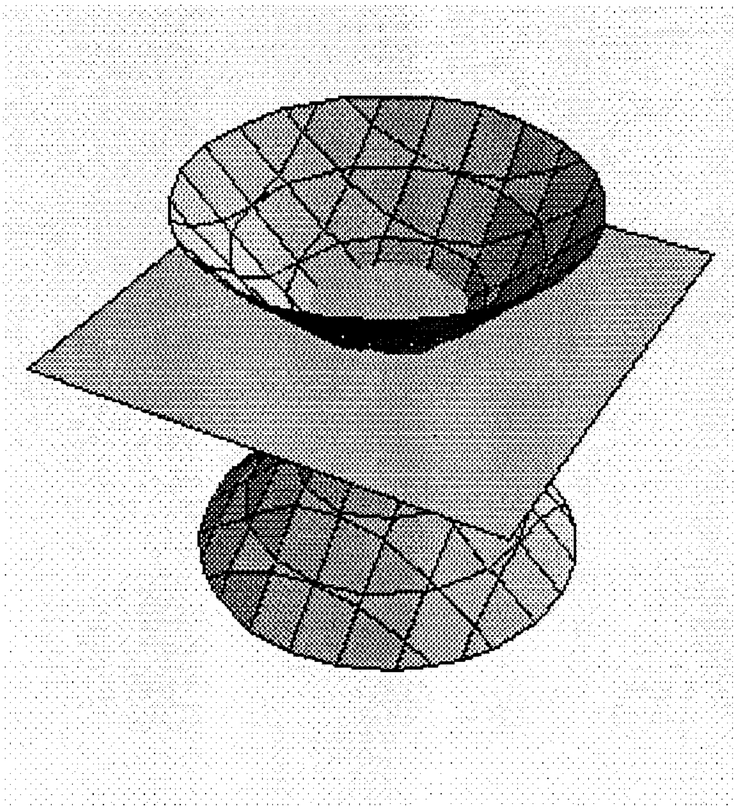
```
?Graphics`Colors`*
```

Sieh dir als Veranschaulichung folgendes Movie zum Jupiter und seinen Monden an. Um die Datenmenge zu verringern, ist nur ein Teil eines kompletten Umlaufes implementiert: Die einzelnen Bilder wurden mit dem Programm Redshift-Multimedia Astronomy von Maris Multimedia Ltd. erzeugt.



Wie kommt es zu diesen 4 Bahnkurven?

Eine Erklärung erhältst du mit Hilfe von 2 Geschwindigkeiten:



In einem Durchlauf treten die 4 Kegelschnitte in folgender Reihenfolge auf : ... .

Einfach easy:
Kegelschnitte sind die Schnittkurven von Doppelkegel und Ebene.

2 Gemeinsamkeiten- Unterschiede

Entwicklung einer gemeinsamen Kegelschnittsgleichung

Im folgenden Abschnitt wird versucht, eine gemeinsame Gleichung für Kegelschnitte mit einem Scheitel
Dazu werden die Parameter p und ε (Epsilon) verwendet. ε wird auch als **numerische Exzentrität**

Führe zuerst folgendes Experiment durch:

EXPERIMENT EXPERIMENT EXPERIMENT

Die 4 Kegelschnitte spielen als mögliche Satellitenbahnen in der Astrophysik eine erhebliche Rolle.

Siehe dazu folgende Graphik

1. kosmische Geschwindigkeit(Kreisbahngeschwindigkeit):
Ein Satellit der Masse m soll von der Oberfläche der Erde (Masse M) senkrecht nach oben bis zur Höhe des Erdradius R aufsteigen.

Diese Geschwindigkeit läßt sich wie folgt bestimmen: $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$
G ist dabei die Gravitationskonstante.

2. kosmische Geschwindigkeit(Fluchtgeschwindigkeit):
Eine Rakete der Masse m wird von der Oberfläche der Erde (Masse M) abgeschossen. Welche Geschwindigkeit muß sie mitbekommen, um die Erde verlassen zu können?

Diese Geschwindigkeit läßt sich wie folgt bestimmen: $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Wird ein Satellit von einer waagrechten Rampe mit der Startgeschwindigkeit v_0 abgeschossen, so ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$v_0 < v_1$ $\rightarrow$ Keine Flugbahn um die Erde möglich
$v_0 = v_1$ $\rightarrow$ Kreis als Flugbahn
$v_1 < v_0 < v_2$ $\rightarrow$ Ellipse als Flugbahn
$v_2 = v_0$ $\rightarrow$ Parabel als Flugbahn
$v_2 < v_0$ $\rightarrow$ Hyperbel als Flugbahn

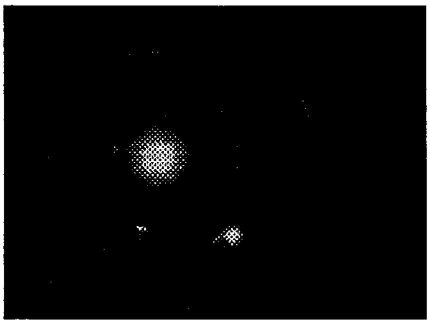
Dies veranschaulicht, die bereits gezeigte Graphik:

Die Bahnen von Sonden zu anderen Planeten sind krumm. Sie setzen sich aus Parabel- Ellipsen-, Kreis- und Hyperbelstücken zusammen.

Das folgende Movie ist ein Ausschnitt von traject.mpg zu finden unter

Zur Nasa Movie Gallery

Es zeigt die Bahn der Cassini-Sonde (geplant 1997), die auf ihrem Weg zum Saturn durch die Schwerkraft von Venus (hier zu sehen) 2-mal und durch die des Jupiter 1-mal beschleunigt werden wird:



Ermittle nun für die Erde v_1 und v_2:
$G = 6.67 {*} 10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2}$, $M = 6 {*} 10^{24}$ kg, $R = 6370$ km
Vergiß nicht die Einheiten anzugleichen.

Lösche zuerst die benötigten Variablen:

```
Clear[G, M, R, v1, v2];
G = □;
M = □;
R = □;
```

$$v1 = \sqrt{\frac{G\,M}{R}}$$

$$v2 = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$$

Die erste kosmische Geschwindigkeit beträgt ... m/s = ... km/s. Die zweite kosmische Geschwindigkeit beträgt ... m/s = ... km/s.

Nun wende dich wiederum der ursprünglichen Fragestellung zu:
Ermittlung einer allgemeinen Gleichung für die Kegelschnitte

Untersuche dies am Beispiel Ellipse.

Lösche zuerst die in einer Ellipsengleichung vorkommenden Variablen und Parameter und zusätzlich Epsilon.

```
Clear[a, b, p, r, x, y, ε];
```

Sieh dir zuerst an, was das Modul Scheitelgleichung macht.

? ScheitelGleichung

Ermittle nun die Scheitelgleichung einer Ellipse mit Standardgleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ und linkem Nebenscheitel im Ursprung mit Hilfe von *Mathematica*:

```
ScheitelGleichung[■];
```

$$\text{term} \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,\ \text{dx} \to a,\ \text{kurve} \to \text{"Ellipse"}$$

Die Scheitelgleichung für die Ellipse lautet: ...

Überpfrüfe die Richtigkeit der Umformungen!

Die Scheitelgleichung für alle Kegelschnitte lautet:

$$y^2 = 2\,p x - (1 - \varepsilon^2)\,x^2$$

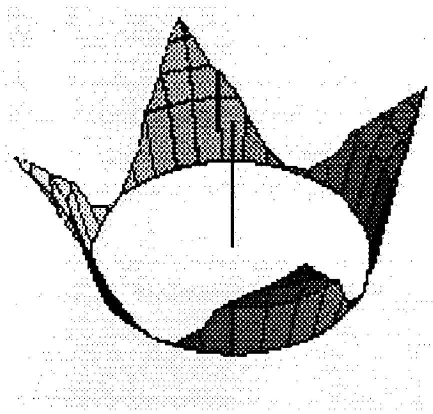
2.1 Entwickle auch die allgemeine Scheitelgleichungen für die Hyperbel, den Kreis und die Parabel mit dem Modul ScheitelGleichung und überprüfe die Korrektheit der Umformungen. Im Eingabeterm für die Kegelschnitte soll der (linke) Scheitel jeweils im Ursprung liegen.

2.2 Zeichne die 4 Kegelschnitte mit gemeinsamen Scheitel auf der rechten Seite.

Wie ändert sich die Gleichung eines Kegelschnittes bei Drehung und Parallelverschiebung ?

Schau dir zuerst einmal an, was z.B durch Rotation des blauen Teils der folgenden Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$

z.B. erzeugt werden kann:



Mit 3D-Programmen können durch Rotation einer Kurve solche Rotationskörper, wie oben, erzeugt werden.

Kehre nun zur zweidimensionalen Arbeit zurück. Sieh dir jetzt an, was das Modul DrehUndParallel macht:

```
? DrehUndParallel
```

Lösche zuerst eventuelle Werte für x und y:

```
Clear[x, y];
```

Hier ein Beispiel für eine Ellipse. Führe es aus:

```
DrehUndParallel[■];
```

$$\texttt{term -> } x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\texttt{,}$$

```
 dx -> 2, dy -> 1, phi -> 30
```

EXPERIMENT EXPERIMENT EXPERIMENT

Klicke auf die soeben berechnete Graphik. Dann kannst du bei **gedrückter** CTRL**-Taste** die Maus-Koordinaten innerhalb der gewählten Graphik einblenden. Versuche den Mittelpunkt der gesuchten Ellipse damit zu bestimmen. Vergleiche das Ergebnis mit der Eingabe.

Die folgende Abbildung zeigt die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ original, gedreht und parallelverschoben.

Hinweis:
Der Trick mit dem Einblenden der Koordinaten funktioniert nur bei frisch berechneten Koordinaten .

Versuche durch Variieren der Parameter dx, dy und phi (jeweils ganzahlig) die obige Abbildung zu imitieren und dadurch die Gleichung der gedrehten und parallelverschobenen Ellipse zu ermitteln.

Führe nun diese Aufgabe durch:

```
DrehUndParallel[■];
```

$$\text{term} \to x^2 + \frac{y^2}{4} - 1,\ \text{dx} \to \square,\ \text{dy} \to \square,\ \text{phi} \to \square$$

Tip:

Lies aus der erzeugten Graphik die Koordinaten bestimmter Punkte zur Überprüfung der Richtigkeit
Dadurch erhältst du Hinweise, wie die Parameter abzuändern sind, um das Ergebnis noch zu verbessern.

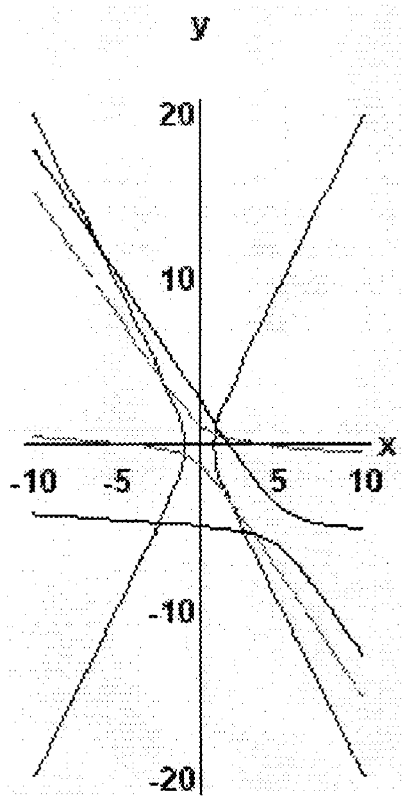
Die Gleichung für die gesuchte Ellipse lautet: ...

2.3 Versuche mit dem Modul DrehUndParallel die Gleichungen der gedrehten und parallelverschobenen Kegelschnitte mit den Gleichungen

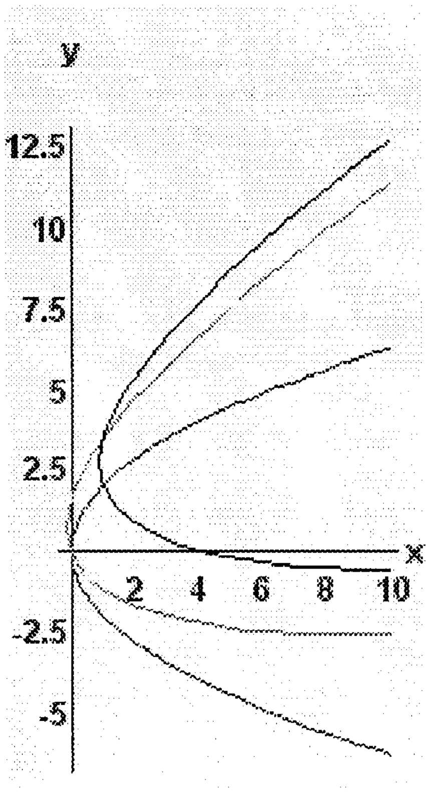
G1) $x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$
G2) $y^2 - 4\,x = 0$

und den dazugehörigen Abbildungen A1) und A2) zu ermitteln.
Hinweis: Winkel in 5° Schritten probieren.
(Antw.:
1) $-9.5 + 2.6\,x + 0.063\,x^2 - 1.3\,y + 1.1\,x\,y + 0.69\,y^2 = 0$
2) $8.9 - 2.7\,x + 0.12\,x^2 - 4.3\,y - 0.64\,x\,y + 0.88\,y^2 = 0$
)

A1)



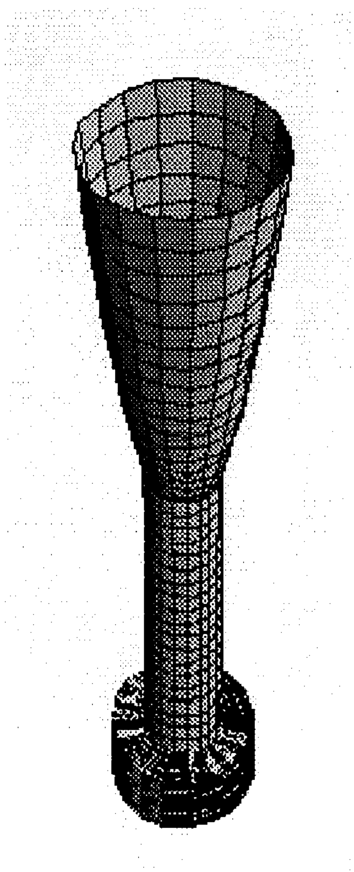
A2)



2.4 Ermittle die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt (3/-2) und Radius 5 mit Hilfe des Modules DrehUndParallel. Überprüfe das Ergbenis mit deinen Kenntnissen über einen Kreis mit Mittelpunkt außerhalb des Ursprungs.
(Antw.: $-12. - 6.\, x + x^2 + 4.\, y + y^2 = 0$**)**

Wie kannst du aus einer allgemeinen Gleichung 2. Grades einen Kegelschnitt herausschälen?

Diesen Drehkörper



kriegst du durch Rotieren folgenden Querschnittes:

Der obere Teil dieser Figur ist ein Paraboloid. Zugrunde liegt ihm eine verschobene Parabel mit der Gleichung $0.8\,x^2 - y + 10.3 = 0$.

Manchmal ist es ganz brauchbar, aus einer allgemeinen Gleichung 2. Grades rauslesen zu können, ob sie eine Parabel, eine Ellipse, einen Kreis, eine Hyperbel oder eben keinen Kegelschnitt darstellt.

Das Modul FiltereGleichung nimmt diese Arbeit ab. Sieh nach, was es genau macht:

```
? FiltereGleichung
```

Wende das Modul FiltereGleichung auf die obige Parabel an.

Lösche zuerst eventuelle Werte für x und y:

```
Clear[x, y];
```

```
FiltereGleichung[■];
```

```
glgsKoeffs -> {0.8, 0, 0, 0, -1, 10.3},
 xBereich -> {-4, 4}
```

Hinweis:
In diesem Beispiel ist die rote Kurve ist nicht zu sehen, da sie von der grünen verdeckt wird. Es liegt keine Rotation bzw. eine Rotation um 0° vor.

Das Ergebnis lautet: Standardgleichung in Ursprungslage: ... Verschiebungsvektor: ... Drehwinkel: 0°

Hier ein Beispiel für eine verschobene und gedrehte Ellipse:

```
FiltereGleichung[■];
```

```
glgsKoeffs -> {5, 4, 2, -18, -12, 15},
 xBereich -> {-20, 20}
```

Das Ergebnis lautet: Standardgleichung in Ursprungslage: ... Verschiebungsvektor: ... Drehwinkel: ...

Noch ein Beispiel, diesesmal eine Parabel mit der Gleichung
$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 220x - 40y - 100 = 0$.

```
FiltereGleichung[■];
```

```
glgsKoeffs -> {9, -24, 16, 220, -40, -100},
 xBereich -> {-20, 20}
```

Das Ergebnis lautet: Standardgleichung in Ursprungslage: ... Verschiebungsvektor: ... Drehwinkel: ...

Zum Abrunden noch ein Beispiel für einen nicht eigentlichen Kegelschnitt mit der Gleichung
$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$.
Das Modul FiltereGleichung bricht mit einer Fehlermeldung ab.

```
FiltereGleichung[■];
```

```
glgsKoeffs -> {□},
 xBereich -> {-20, 20}
```

2.5 Wie lauten Art, Drehwinkel, Verschiebungsvektor und Standardgleichung für die Kegelschnitte mit folgender Gleichung:

a) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 26x - 4y + 5 = 0$
b) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 8 = 0$
c) $x^2 - xy + y^2 - 6x + 9 = 0$
d) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 8y - 11 = 0$

(Antw.: Verschiebungsvektoren:
a) (3/1) b) (0/0) c) (4/2) d) (-1/1))

2.6 Ermittle die allgemeine Gleichung zweiten Grades für einen Kreis mit r = 1 und Verschiebungsvektor (3/-1) und wende auf das Ergebnis das Modul FiltereGleichung an. Vergleiche dessen Ergebnisse mit Deinen Ausgangswerten.

Vordefinierte *Mathematica* Funktionen